BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2007

ЯВНЫЙ ВИД ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА ВРЕМЕНИ ПЕРВОГО ДОСТИЖЕНИЯ УРОВНЯ НУЛЬ ПРОЦЕССОМ ПОЛУМАРКОВСКОГО БЛУЖДАНИЯ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ СНОСОМ, ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ СКАЧКАМИ И ЗАДЕРЖИВАЮЩИМ ЭКРАНОМ В НУЛЕ

***Т.И.НАСИРОВА, **Э.А.ИБАЕВ**

****Бакинский Государственный Университет***

*****Институт Кибернетики НАНА***

Одним из важных проблем в теории случайных процессов является нахождение распределения граничных функционалов процессов полумарковского блуждания. С этой целью в данной статье исследуется процесс полумарковского блуждания с отрицательным сносом, положительными скачками и задерживающим экраном в нуле. Вводится случайная величина – время, при котором процесс впервые достигает уровня нуль. Доказывается теорема об интегральном представлении преобразования Лапласа условного распределения этой случайной величины (в случае произвольного случайного блуждания). Затем полученное интегральное уравнение решается в классе эрланговских распределений.

Нахождению распределения времени первого достижения экрана «0» посвящено немало работ. В [1] получена явная формула для распределения случайного блуждания, порожденным симметричными непрерывно распределенными случайными величинами. В работе [2] получен неявный вид преобразования Лапласа первого достижения уровня нуль. В данной работе другим, более простым методом получен явный вид преобразования Лапласа распределения той же величины.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, P(\cdot))$ задана последовательность независимых одинаково распределенных положительных случайных величин $\{\xi_k(\omega), \zeta_k(\omega)\}$, $k=\overline{1,\infty}$. Исходя из этих случайных величин, строим процесс полумарковского блуждания [3]:

$$X_1(t,\omega) = z - t + \sum_{i=0}^{k-1} \zeta_i(\omega), \quad \text{если} \quad \sum_{i=0}^{k-1} \xi_i(\omega) \le t < \sum_{i=0}^{k} \xi_i(\omega), \tag{1}$$

где $\xi_0(\omega) = \zeta_0(\omega) = 0$.

Этот процесс задержим по методу Боровкова [4] с экраном в нуле:

$$X(t,\omega) = X_1(t,\omega) - \inf_{0 \le s \le t}(0, X_1(s,\omega)).$$

Через $\tau_1^0(\omega)$ обозначим момент первого достижения экрана «0» процессом

$X(t,\omega)$, а через $L(\theta)$ - преобразование Лапласа распределения случайной величины $\tau_1^0(\omega)$:

$$\tau_1^0(\omega) = \inf\{\, t : X(t,\omega) \le 0 \,\},$$
$$L(\theta) = Ee^{-\theta\tau_1^0(\omega)}, \quad \theta > 0.$$

Цель в этой статье – найти явный вид $L(\theta)$, когда длительность сноса подчинена экспоненциальному распределению, а размер скачков - по эрланговскому распределению любого порядка.

Пусть процесс $X(t,\omega)$ в начальный момент находится в состоянии $z(z \ge 0)$.

Для нахождения $L(\theta)$ найдем преобразования Лапласа условной функции распределения случайной величины $\tau_1^0(\omega)$:

$$L(\theta / z) = E(e^{-\theta\tau_1^0(\omega)} / X(0,\omega) = z), \quad \theta > 0 .$$

Теорема. Преобразование Лапласа условного распределения случайной величины $\tau_1^0(\omega)$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$L(\theta / z) = e^{-\theta z} P\{\, \xi_1(\omega) > z \,\} -$$
$$- e^{-\theta z} \int_{y=0}^{\infty} e^{-\theta y} \int_{\alpha=y}^{z+y} e^{\theta\alpha} L(\theta / \alpha)\, d_\alpha P\{\, \xi_1(\omega) < z + y - \alpha \,\} dP\{\, \zeta_1(\omega) < y \,\}. \qquad (2)$$

В частности, если распределения $\xi_1(\omega)$ и $\zeta_1(\omega)$ имеют плотности распределения вероятностей, то

$$L(\theta / z) = e^{-\theta z} P\{\xi_1(\omega) > z\} +$$
$$+ e^{-\theta z} \int_{y=0}^{\infty} e^{-\theta y} \int_{\alpha=y}^{y+z} e^{\alpha\theta} L(\theta / \alpha)\, p_{\xi_1}(z + y - \alpha)\, p_{\zeta_1}(y)\, d\alpha\, dy . \qquad (3)$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\tau_1^0(\omega) = \begin{cases} z, & \text{если} \quad z < \xi_1(\omega), \\ \xi_1(\omega) + T(\omega), & \text{если} \quad z > \xi_1(\omega), \end{cases}$$

где $\tau_1^0(\omega) \overset{d}{=} T(\omega)$.

По формуле полной вероятности имеем:

$$E(e^{-\theta\tau_1^0(\omega)} / X(0,\omega) = z) = \int_\Omega e^{-\theta\tau_1^0(\omega)} P_z(d\omega) = \int_{\{\omega : \xi_1(\omega) > z\}} e^{-\theta\tau_1^0(\omega)} P(d\omega) +$$

$$+ \int_{\{\omega : \xi_1(\omega) < z\}} e^{-\theta\tau_1^0(\omega)} P(d\omega) = \int_{\{\omega : \xi_1(\omega) > z\}} e^{-\theta z} P(d\omega) + \int_{\{\omega : \xi_1(\omega) < z\}} e^{-\theta[\xi_1(\omega) + T(\omega)]} P(d\omega) =$$

$$= e^{-\theta z} P\{\xi_1(\omega) > z\} + \int_{\{\omega : \xi_1(\omega) < z\}} e^{-\theta\xi_1(\omega)} e^{-\theta T(\omega)} P(d\omega / X(0,\omega) = z - \xi_1(\omega) + \zeta_1(\omega)) =$$

$$= e^{-\theta z} P\{\xi_1(\omega) > z\} +$$

$$+ \int\limits_{y=0}^{\infty} \int\limits_{s=0}^{z} \int\limits_{x=0}^{\infty} e^{-\theta s} e^{-\theta x} P\{\xi_1(\omega) \in ds, \zeta_1(\omega) \in dy, T(\omega) \in dx / X(0,\omega) = z - s + y\} =$$

$$= e^{-\theta z} P\{\xi_1(\omega) > z\} +$$
$$+ \int\limits_{y=0}^{\infty} \int\limits_{s=0}^{z} e^{-\theta s} \int\limits_{x=0}^{\infty} e^{-\theta x} P\{T(\omega) \in dx / X(0,\omega) = z - s + y\} dP\{\xi_1(\omega) < s\} dP\{\zeta_1(\omega) < y\} =$$
$$= e^{-\theta z} P\{\xi_1(\omega) > z\} -$$

$$- e^{-\theta z} \int\limits_{y=0}^{\infty} e^{-\theta y} \int\limits_{\alpha=y}^{y+z} e^{\theta\alpha} L(\theta/\alpha) d_\alpha P\{\xi_1(\omega) < y + z - \alpha\} dP\{\zeta_1(\omega) < y\}.$$

Чем и доказана первая часть теоремы. Что касается второй части теоремы, то она доказывается по свойству абсолютно-непрерывной функции распределения. Теорема доказана.

Интегральное уравнение (2) можно решить методом последовательных приближений. Но полученное решение не пригодно для приложений. Это уравнение имеет решение в простом виде в классе эрланговских распределений.

Уравнение (3) будем решать в случае, когда случайные величины $\xi_1(\omega)$ и $\zeta_1(\omega)$ имеют эрланговские распределения порядка $(1^-, m^+)$, $m^+ = 1,2,3,...$ с параметрами μ и λ, соответственно, т.е.

$$P\{\xi_1(\omega) < t\} = \left[1 - e^{-\mu t}\right] \varepsilon(t), \quad \mu > 0$$

и

$$P\{\zeta_1(\omega) < t\} = \left[1 - \sum_{k=0}^{m^+ - 1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}\right] \varepsilon(t), \quad \lambda > 0,$$

где

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

В случае $(1^-, m^+)$ интегральное уравнение (3) примет вид:

$$L(\theta/z) = e^{-(\mu+\theta)z} + \frac{\lambda^{m+}\mu}{(m^+ - 1)!} e^{-(\mu+\theta)z} \int\limits_{y=0}^{\infty} y^{m^+ - 1} e^{-(\lambda+\mu+\theta)y} \int\limits_{\alpha=y}^{y+z} e^{(\mu+\theta)\alpha} L(\theta/\alpha) d\alpha\, dy. \quad (4)$$

Из этого интегрального уравнения получаем дифференциальное уравнение

$$\sum_{k=0}^{m^+} C_{m^+}^k \left[(\mu + \theta) L^{(k)}(\theta/z) + L^{(k+1)}(\theta/z)\right] (-1)^{m^+ - k} \lambda^{m^+ - k} - (-1)^{m^+} \lambda^{m^+} \mu L(\theta/z) = 0$$ с

граничными условиями

$$
\begin{cases}
L(\theta/0)=1, \\
L'(\theta/0)=-(\mu+\theta)+\dfrac{\lambda^{m^+}\mu}{(m^+-1)!}\displaystyle\int_{x=0}^{\infty} x^{m^+-1}e^{-\lambda x}L(\theta/x)dx, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\displaystyle\sum_{i=0}^{k} C_k^i\left[(\mu+\theta)L^{(i)}(\theta/0)+L^{(i+1)}(\theta/0)\right](-1)^{k-i}\lambda^{k-i}=\dfrac{(-1)^k\lambda^{m^+}\mu}{(m^+-(k+1))!}\int_{x=0}^{\infty} x^{m^--(k+1)}e^{-\lambda x}L(\theta/x)dx, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (5) \\
\displaystyle\sum_{i=0}^{m^+-2} C_{m^+-2}^i\left[(\mu+\theta)L^{(i)}(\theta/0)+L^{(i+1)}(\theta/0)\right](-1)^{m^+-(i+2)}\lambda^{m^+-(i+2)}=(-1)^{m^+-2}\lambda^{m^+}\mu\int_{x=0}^{\infty} x\ e^{-\lambda x}L(\theta/x)dx, \\
\displaystyle\sum_{i=0}^{m^+-1} C_{m^+-1}^i\left[(\mu+\theta)L^{(i)}(\theta/0)+L^{(i+1)}(\theta/0)\right](-1)^{m^+-(i+1)}\lambda^{m^+-(i+1)}=(-1)^{m^+-1}\lambda^{m^+}\mu\int_{x=0}^{\infty} x\ e^{-\lambda x}L(\theta/x)dx,
\end{cases}
$$

характеристическим уравнением

$$
\sum_{i=0}^{m^+} C_{m^+}^i\left[(\mu+\theta)k^i(\theta)+k^{(i+1)}(\theta)\right](-1)^{m^+-i}\lambda^{m^+}-(-1)^{m^+}\lambda^{m^+}\mu=0 \qquad (6)
$$

и общим решением

$$
L(\theta/z)=\sum_{i=0}^{m^++1} c_i(\theta)e^{k_i(\theta)z}, \qquad (7)
$$

где $c_i(\theta)$ – постоянные относительно z и $k_i(\theta)$, $i=\overline{1,m^++1}$,– корни характеристического уравнения (6). Пользуясь граничными условиями (5) и общим решением (7) получаем следующую систему неоднородных линейных алгебраических уравнений относительно $c_l(\theta)$, $l=\overline{1,m^++1}$:

$$
\begin{cases}
\displaystyle\sum_{l=1}^{m^++1} c_l(\theta)=1, \\
\displaystyle\sum_{l=1}^{m^++1}\left\{k_l(\theta)-\dfrac{\lambda^{m^+}\mu}{\left[\lambda-k_l(\theta)\right]^{m^+}}\right\}c_l(\theta)=-(\mu+\theta), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\displaystyle\sum_{l=1}^{m^++1}\left\{\sum_{i=0}^{k} C_k^i\left[(\mu+\theta)k_l^i(\theta)+k_l^{i+1}(\theta)\right](-1)^{k-i}\lambda^{k-i}-\dfrac{(-1)^k\lambda^{m^+}\mu}{\left[\lambda-k_l(\theta)\right]^{m^+-k}}\right\}c_l(\theta)=0, \qquad (8) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\displaystyle\sum_{l=1}^{m^++1}\left\{\sum_{i=0}^{m^+-2} C_{m^+-2}^i\left[(\mu+\theta)k_l^i(\theta)+k_l^{i+1}(\theta)\right](-1)^{[m^+-(i+2)]}\lambda^{[m^+-(i+2)]}-\dfrac{(-1)^{m^+-2}\lambda^{m^+}\mu}{\left[\lambda-k_l(\theta)\right]^2}\right\}c_l(\theta)=0, \\
\displaystyle\sum_{l=1}^{m^++1}\left\{\sum_{i=0}^{m^+-1} C_{m^+-1}^i\left[(\mu+\theta)k_l^i(\theta)+k_l^{i+1}(\theta)\right](-1)^{[m^+-(i+1)]}\lambda^{[m^+-(i+1)]}-\dfrac{(-1)^{m^+-1}\lambda^{m^+}\mu}{\lambda-k_l(\theta)}\right\}c_l(\theta)=0.
\end{cases}
$$

Учитывая, что

$$\prod_{i=1}^{m^+ +1}\left[\lambda-k_i(\theta)\right]=(-1)^{m^+ +1}\lambda^{m^+}\mu \quad ,$$

$$\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m^+ +1}\left[\lambda-k_i(\theta)\right]=(-1)^{m^+ -1}\left[\lambda-k_j(\theta)\right]^{m^+ -1}\left[\mu+\theta+k_j(\theta)\right], \qquad j=\overline{1,m^+ +1},$$

обнаруживаем, что все уравнения системы (8) сводятся к первому уравнению этой же системы. Тогда для определения неизвестных $c_1(\theta),\ldots,\ c_{m^+ +1}(\theta)$ получаем одно уравнение

$$c_1(\theta)+c_2(\theta)+\ldots+c_{m^+ +1}(\theta)=1.$$

Только при решении $(1,0,\ldots,0)$ $L(\theta/z)$ будет преобразованием Лапласа распределения случайной величины $\tau_1^0(\omega)$. Тогда имеем:

$$L(\theta/z)=e^{k_1(\theta)z},$$

где $k_1(\theta)$ – тот корень характеристического уравнения (6), который обладает свойством $k_1(0)=0$.

Таким образом, при $(1^-,m^+)$ имеем:

$$L(\theta)=\int_{z=0}^{\infty}L(\theta/z)\,dP\left\{\zeta_1(\omega)<z\right\}=\frac{\lambda^{m^+}}{\left[\lambda-k_1(\theta)\right]^{m^+}}. \tag{9}$$

Теперь найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\tau_1^0(\omega)$. Из (9) находим:

$$L'(\theta)=\frac{m^+\lambda^{m^+}k_1'(\theta)}{\left[\lambda-k_1(\theta)\right]^{m^+ +1}},\ L''(\theta)=\frac{m^+\lambda^{m^+}\left[\lambda-k_1(\theta)\right]k_1''(\theta)+m^+(m^+ +1)\lambda^{m^+}\left[k_1'(\theta)\right]^2}{\left[\lambda-k_1(\theta)\right]^{m^+ +2}}.$$

При $\theta=0$ получаем:

$$L'(0)=\frac{m^+k_1'(0)}{\lambda},\ L''(0)=\frac{m^+\lambda k_1''(0)+m^+(m^+ +1)\left[k_1'(0)\right]^2}{\lambda^2}.$$

Из характеристического уравнения (6) находим, что

$$k_1'(0)=\frac{\lambda}{\lambda-m^+\mu},\qquad k_1''(0)=\frac{m^+(m^+ +1)\lambda\mu}{(\lambda-m^+\mu)^3}.$$

Тогда имеем

$$L'(0)=\frac{m^+}{\lambda-m^+\mu},\qquad L''(0)=\frac{m^+(m^+ +1)\lambda}{(\lambda-m^+\mu)^3}.$$

Поэтому в случае $(1^-,m^+)$ при $\lambda>m^+\mu$ получим, что

$$E\tau_1^0(\omega)=\frac{m^+}{\lambda-m^+\mu}=\frac{E\xi_1(\omega)E\zeta_1(\omega)}{E\xi_1(\omega)-E\zeta_1(\omega)},$$

$$D\tau_1^0(\omega)=\frac{m^+\left[\lambda+(m^+)^2\mu\right]}{(\lambda-m^+\mu)^3}=\frac{E\xi_1(\omega)+m^+E\zeta_1(\omega)}{m^+\left[E\xi_1(\omega)-E\zeta_1(\omega)\right]^3}\left[E\xi_1(\omega)\right]^2\left[E\zeta_1(\omega)\right]^2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Боровков А.А. Теория вероятностей. - М.: Наука, - 2003. - 472 с.
2. Климов Г.П. Стохастические системы обслуживания. - М.: Наука, - 1966. – 243с.
3. Насирова Т.И. Процессы полумарковского блуждания. Б.: Элм, - 1984. - 163 с.
4. Боровков А.А. Вероятностные методы в теории массового обслуживания. М.: Наука, - 1972. - 368 с.

MƏNFI AXINLI, MÜSBƏT SIÇRAYIŞLI VƏ SIFIRDA GECIKDIRƏN EKRANA MALIK SEMI-MARKOV DOLAŞMA PROSESININ BIRINCI DƏFƏ SIFIR SƏVIYYƏSINƏ ÇATMA ANININ PAYLANMASININ LAPLAS ÇEVIRMƏSININ AŞKAR ŞƏKLI

T.H.NƏSIROVA, E.A.İBAYEV

XÜLASƏ

Təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində mühüm məsələlərdən biri semi-markov dolaşma prosesinin sərhəd funksionallarının paylanmasını tapmaqdır. Bu məqsədlə təqdim olunan məqalədə mənfi axınlı, müsbət sıçrayışlı və sıfırda gecikdirən ekrana malik semi-markov dolaşma prosesi araşdırılıb. Prosesin birinci dəfə sıfır səviyyəsinə çatma anı adlanan təsadüfi kəmiyyət daxil edilib. Bu təsadüfi kəmiyyətin şərti paylanmasının Laplas çevirməsinin inteqral şəkli haqda teorem isbat olunub (istənilən təsadüfi dolaşma halında). Sonra alınan inteqral tənlik erlanq paylanmalar sinfində həll olunub.

THE EVIDENT FORM OF THE LAPLACE TRANSFORMATION OF THE DISTRIBUTION OF THE FIRST MOMENT REACHING OF A LEVEL ZERO WITH THE PROCESS OF SEMI-MARKOVIAN RANDOM WALK WITH NEGATIVE DRIFT AND POSITIVE JUMPS, WITH THE DELAYING SCREEN IN ZERO

T.I.NASIROVA, E.A.IBAYEV

SUMMARY

One of the important problems in the theory stochastic processes are a finding of the distributions of the boundary functionals of the processes semi-markovian random walk. With this purpose in this article the process semi-markovian random walk with negative drift and positive jumps and with the delaying screen in the zero is investigated. The random variable - the moment, in which the process for the first moment reaches the zero level, is introduced. The theorem about integration representation of Laplace transformation of conditional distribution of this random variable is proved (in the case of arbitrary random walk). Then this integral equation is solved in the class of erlangian distributions.